La bilancetta di Galileo

Appunti redatti da Giovanni Casini

Il sistema più semplice per svelare la truffa dell'orefice di Gerone consiste nel confrontare il volume della corona con quello di una massa d'oro di egual peso. Si prende un recipiente adatto a contenere la corona, quindi si riempie d'acqua fino all'orlo. Si immerge lentamente l'oro e una quantità d'acqua pari al volume dell'oro traboccherà. Si toglie l'oro e si immerge lentamente la corona. Se il volume della corona è maggiore di quello dell'oro altra acqua traboccherà.
Se il volume della corona è maggiore di quello dell'oro siamo sicuri della truffa, perché la densità della lega oro-argento è inferiore a quella del solo oro e la corona avrà un volume maggiore. La differenza di volume è la prova della truffa.
Chiunque abbia provato a fare l'esperimento della corona di Gerone con una corona di dimensioni normali, ovviamente di lega economica, sarà stato costretto a utilizzare un recipiente piuttosto grande. La grandezza del recipiente influisce ovviamente sull'aumento di livello dell'acqua, che può ridursi a circa un millimetro. Ad esempio se la nostra corona pesa 1kg ed è fatta 80% di ottone e 20% di Alluminio, avremo:
Volume di 1kg di ottone=116.96 cm^3 (densità ottone 8,55 kg/dm^3)
Volume di una corona 80 Ott/20 Al=165.78 cm^3 (densità Al=2,77 kg/dm^3)
La differenza di volume è 48.8 cm^3.
L'aumento di livello in una pentola di 25cm di diametro, 491cm^2 di area, è circa 1mm.
Se così è l'esperimento fallirà nello svelare la truffa perché subentrerà un altro fenomeno, la tensione superficiale, che impedirà all'acqua di traboccare.

Galileo doveva aver provato a fare l'esperimento, o semplicemente si era fatto i calcoli e riteneva molto rozzo il sistema.
Così propose il suo sistema, molto più raffinato, che utilizza una bilancia. La bilancia di Galileo è fondamentalmente un densimetro, e funziona bene anche se i due bracci sono diseguali.
Supponiamo di avere una bilancia con il braccio 2 più lungo del braccio 1. Il braccio 2 è dotato di un avvolgimento di filo sottile avvolto lungo tutto il braccio, su cui si può spostare il sostegno del contrappeso che si appoggia fra due spire contigue. Possiamo allora misurare lo spostamento del contrappeso contando le spire e moltiplicando per il diametro del filo; in tal modo costituisce la scala dello strumento.
Vediamo come la bilancia permette di misurare la densità.
Prendiamo un corpo omogeneo di densità $\rho > 1$e lo appendiamo al braccio 1 a distanza b_1 dal fulcro. Sul braccio 2 a distanza $b_2$dal fulcro appendiamo il nostro contrappeso P.
Possiamo eguagliare i momenti e scrivere

$$Pb_2 = \rho V g b_1$$

Ora prendiamo un recipiente con acqua pura e mettiamolo sotto il corpo, in modo che sia completamente immerso. La bilancia non sarà più in equilibrio a causa della spinta idrostatica, ma Galileo, invece di diminuire l'entità del contrappeso, preferisce diminuire il braccio $b_2$in modo da recuperare l'equilibrio. La nuova equazione dei momenti è

$$Pb'_2 = (\rho - 1)V g b_1$$

Ora ricavando P dalla prima equazione

$$P = \rho V g b_1 / b_2$$
e inserendolo nella seconda equazione abbiamo
$$\rho V g b_1 b'_2 / b_2 = (\rho - 1) V g b_1$$
che risolto rispetto alla densità è
$$b'_2 / b_2 = (\rho - 1)/\rho$$
Abbiamo realizzato un densimetro con scala non lineare. Se $\rho = 1$ la spinta idrostatica equilibrerà il peso del corpo e dovremo togliere il contrappeso, o metterlo sul fulcro, cioè $b'_2 = 0$. Se il corpo ha densità 2, $b'_2 = b_2/2$. Se il corpo fa densità infinita (non ha volume) non subisce alcuna spinta idrostatica e $b'_2 = b_2$.
Non è difficile costruire una bilancia sensibile al grammo, che con un braccio sufficientemente lungo può diventare un densimetro accurato. Teoricamente la massa del campione non conta, ma dato che la spinta idrostatica dipende dal volume del campione, un campione deve avere un volume minimo di 1 cm^3(e il peso minimo di 1g perché la bilancia funziona solo con corpi che non galleggiano, completamente immersi). È ovvio che con un volume di un solo cm^3 l'errore percentuale è il 100%, quindi convengono corpi un po' più grandi, diciamo almeno 100g, in modo che anche con i materiali più densi si hanno almeno circa 20g di spinta idrostatica.
Per calcolare la sensibilità in termini di densità, bisogna trasformare la sensibilità da peso a momento, cioè $\Delta M_{min} = \Delta F_{min} * b + F * \Delta b_{min}$. Normalmente b=cost e si guarda la variazione minima di forza che la bilancia sente, in questo caso invece si mantiene costante la forza peso e si varia il braccio.
Il secondo termine è lo spostamento minimo del contrappeso che possiamo apprezzare o che la bilancia sente; quest'ultimo è tanto più piccolo quanto più pesante è il campione.
Riscriviamo la densità come funzione
$$\rho(b'_2) = \frac{1}{1 - b'_2/b_2}$$
e calcoliamo l'errore, che include anche l'errore sulla lunghezza originale del braccio
$$\Delta\rho = \rho^2 \left(\frac{\Delta b'_2}{b_2} - \frac{b'_2 \Delta b_2}{b^2{}_2} \right)$$
$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \rho \left(\frac{\Delta b'_2}{b_2} - \frac{b'_2 \Delta b_2}{b^2{}_2} \right)$$
Con riferimento all'errore relativo notiamo che il termine tra parentesi è piccolo, ma è moltiplicato per la densità. Prendiamo ad esempio il valore massimo possibile per la densità, che è circa 22, con un braccio b_2 di 0,5m. Avremo
$$b'_2 = \frac{1}{2}(22 - 1)/22 \ = 0{,}4773m$$
cioè uno spostamento di 22,7mm dal braccio intero. Un ulteriore spostamento di 1mm corrisponde a un valore di densità pari a
$$\rho(0{,}476) = \frac{1}{1 - 0{,}476/0{,}5} = 20{,}8$$
e lo spostamento del successivo millimetro
$$\rho(0{,}475) = \frac{1}{1 - 0{,}475/0{,}5} = 20$$
Il che mostra che il densimetro di Galileo è molto sensibile alle basse densità, dato che una variazione da 1 a 2 richiede metà braccio, mentre per le alte densità è un po' meno efficace. Con la densità dell'oro (19,32 kg/dm^3) il braccio sarà
$$b'_2 = \frac{1}{2}(19{,}32 - 1)/19{,}32 \ = 0{,}4741m$$

Con uno spostamento di 25,9mm. Un ulteriore spostamento di un millimetro (inteso come il minimo spostamento rilevabile) corrisponde alla minima variazione di densità misurabile

$$\rho(0{,}473) = \frac{1}{1 - \frac{0{,}473}{0{,}5}} = 18.52 \frac{kg}{dm^3}$$

A che percentuale di argento corrisponde? Partiamo dalla densità della lega

$$m_{Au} + m_{Ag} = 18.52 * (V_{Au} + V_{Ag})$$

E poniamo che la quantità di oro nella lega sia di 1kg

$$m_{Ag} = 18.52 * \left(\frac{1}{\rho_{Au}} + \frac{m_{Ag}}{\rho_{Ag}}\right) - 1$$

$$m_{Ag}\left(1 - \frac{18.52}{\rho_{Ag}}\right) = \frac{18.52}{\rho_{Au}} - 1$$

$$m_{Ag} = \frac{\left(1 - \frac{18.52}{\rho_{Au}}\right)}{\left(\frac{18.52}{\rho_{Ag}} - 1\right)} = 0{,}0234\ kg$$

In grado quindi di rivelare una presenza del 2,34% di argento: questa è la sensibilità della bilancia alla truffa.